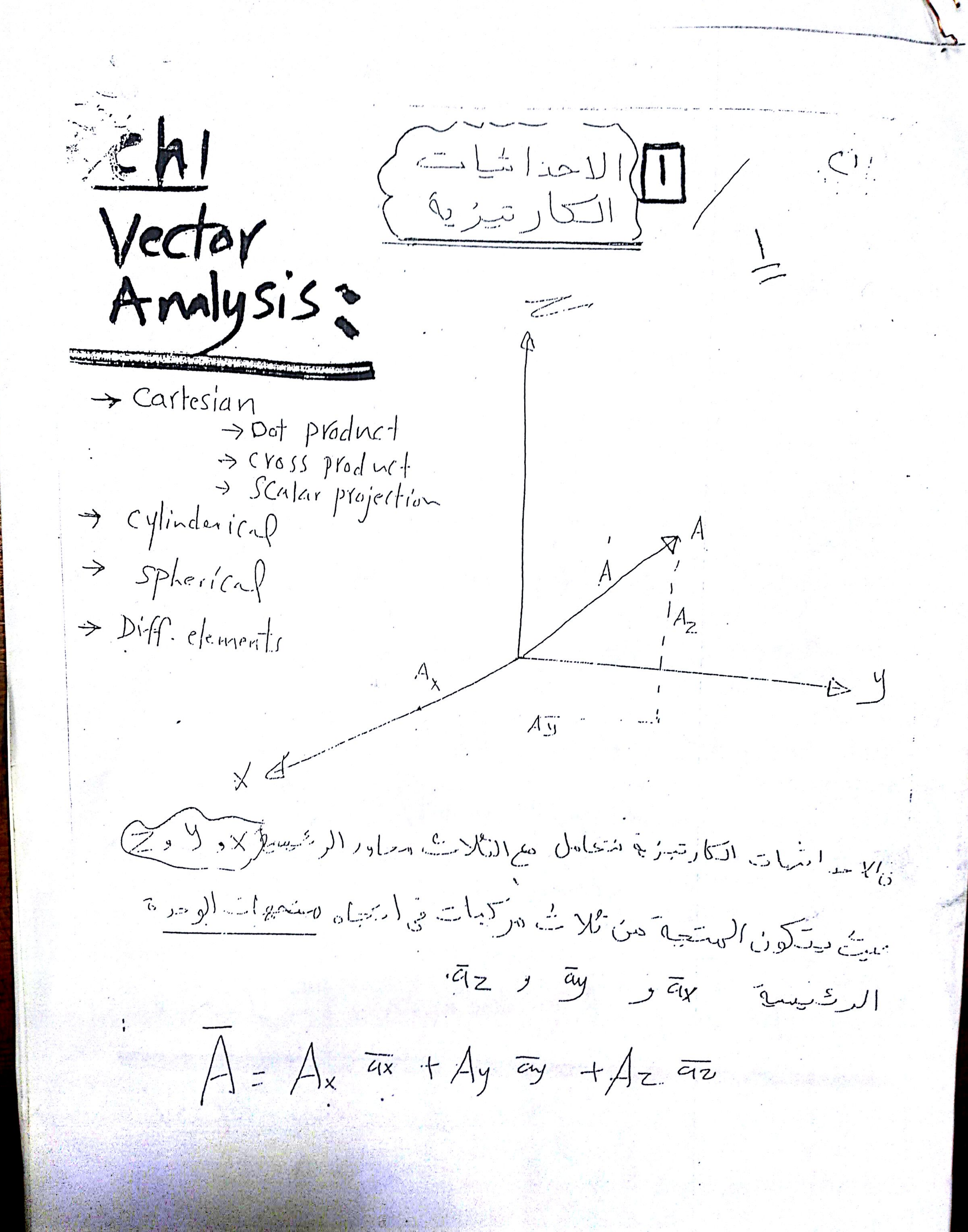


ch1 Vector Analysis:

- → Cartesian
  - → Dot product
  - → cross product
  - → Scalar projection
- → Cylinderical
- → Spherical
- → Diff. elements

1 الاحداثيات الكارتيزية

الاحداثيات الكارتيزية تتعامل مع الثلاث محاور الرئيسية X و Y و Z

حيث يتكون المتجه من ثلاث مركبات في اتجاه متجهات الوحدة

الرئيسية $\bar{a}_x$ و $\bar{a}_y$ و $\bar{a}_z$

$$\bar{A} = A_x \, \bar{a}_x + A_y \, \bar{a}_y + A_z \, \bar{a}_z$$

كيفية تحديد متجه

معرفة المقدار والاتجاه

معرفة نقطة البداية ونقطة النهاية ← خاص بالكارتيزى فقط

مثال متجه يبدأ بنقطة $A(0,0,0)$ وينتهى بنقطة $B(5,4,-2)$

$$\overline{AB} = \overline{B} - \overline{A}$$

($\overline{B}$ الثانى، $\overline{A}$ الأول)

$$= 5\bar{a}_x + 4a_y - 2\bar{a}_z$$

ن متجه فى الاحداثيات الكارتيزية بشكل [illegible]

$$\bar{A} = A_x\,\bar{a}_x + A_y\,\bar{a}_y + A_z\,\bar{a}_z$$

$$\bar{B} = B_x\,\bar{a}_x + B_y\,\bar{a}_y + B_z\,\bar{a}_z$$

مركبة المتجه فى اتجاه X — المركبة فى اتجاه y — المركبة فى اتجاه Z

$$|A| = \text{magnitude of } \bar{A} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Vector addition

$$\bar{A} + \bar{B} = (A_x + B_x)\,\bar{a}_x + (A_y + B_y)\,\bar{a}_y + (A_z + B_z)\,\bar{a}_z$$

$$= \bar{B} + \bar{A}$$

Vector subtraction

$$\bar{A} - \bar{B} = (A_x - B_x)\bar{a}_x + (A_y - B_y)\bar{a}_y + (A_z - B_z)$$

$$\neq \bar{B} - \bar{A}$$

Multipling times in scale value

$$r\bar{A} = rA_x \bar{a}_x + rA_y \bar{a}_y + rA_z \bar{a}_z$$

Dot product = Scalar product ضرب القياسي

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = |A||B| \cos\theta$$

$$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$= \bar{B} \cdot \bar{A}$$

A

θ

a_B

B

يستخدم الضرب القياسي

1) معرفة الزاوية بين متجهين A و B

2) اسقاط متجة على متجة آخر (مركبات المتجة على متجه آخر)

Scalar projection of $\bar{A}$ on $\bar{B}$ ⇒

$$\bar{A} \cdot \bar{a}_B = |A| \cos\theta = \frac{\bar{A} \cdot \bar{B}}{|B|}$$

$$\bar{a}_B = \frac{\bar{B}}{|B|} = \frac{B_x \bar{a}_x + B_y \bar{a}_y + B_z \bar{a}_z}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

ملاحظة

$$\bar{A} \cdot \bar{a}_x = A_x \quad ; \quad \bar{A} \cdot \bar{a}_y = A_y \quad ; \quad \bar{A} \cdot \bar{a}_z = A_z$$

$$\bar{a}_x \cdot \bar{a}_x = \bar{a}_y \cdot \bar{a}_y = \bar{a}_z \cdot \bar{a}_z = 1$$

$$\bar{a}_x \cdot \bar{a}_y = \bar{a}_y \cdot \bar{a}_z = \bar{a}_z \cdot \bar{a}_x = 0$$

لأن الزاوية بين كل متجهين 90°

$\cos 90 = zero$

$$\therefore \bar{A} \cdot \bar{A} = |A|^2$$

Cross product

حاصل الضرب كمية متجهة

$$\bar{A} \times \bar{B} = (|A||B| \sin\theta)\, \bar{a}_N$$

$$= \begin{vmatrix} \overset{\oplus}{\bar{a}_x} & \overset{\ominus}{\bar{a}_y} & \overset{\oplus}{\bar{a}_z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

حيث $\bar{a}_N$: متجهة الوحدة العمودي على المستوى الحاوي لكل من $\bar{A}$ و $\bar{B}$ بمعنى آخر :- الناتج هو متجه عمودي على المستوى الذي يحوي $\bar{A}$ و $\bar{B}$

1 تحديد متجه الوحدة العمودي على مستوى ما مهم

$$\bar{a}_N = \frac{\bar{A} \times \bar{B}}{|\bar{A} \times \bar{B}|}$$

2 تحديد مساحة متوازي الأضلاع (ضعف مساحة المثلث)

حيث A و B ضلعين متجاورين فيه

$Area = |\bar{A} \times \bar{B}|$ مساحة متوازي الأضلاع

ملاحظة

$\bar{a}_x \times \bar{a}_y = \bar{a}_z$ ‖ $\bar{a}_y \times \bar{a}_x = -\bar{a}_z$

$\bar{a}_y \times \bar{a}_z = \bar{a}_x$ ‖ $\bar{a}_z \times \bar{a}_y = -\bar{a}_x$

$\bar{a}_z \times \bar{a}_x = \bar{a}_y$ ‖ $\bar{a}_x \times \bar{a}_z = -\bar{a}_y$

$\bar{a}_x$ → $\bar{a}_y$ → $\bar{a}_z$ (+)

$$\bar{a}_x \times \bar{a}_x = \bar{a}_y \times \bar{a}_y = \bar{a}_z \times \bar{a}_z = 0$$

$$\bar{A} \times A = 0$$

Cylindrical Coordinate:

١) تحديد نقطة في فراغ اسطواني

$$(r , \phi , z)$$

Where

r :- نصف قطر الدائرة التي تقع على محيطها النقطة ( )
مركز الدائرة يقع على محور (z) [محور الدائرة هو محور z]

Z :- الإرتفاع عن مستوى يضم نقطة الأصل الموازي للمستوى (xy)

ϕ :- الزاوية بين محور x والمستوى الحاوي للنقطة P

متجه الوحدة في اتجاه المتجه

$\bar{a}_r$ متجه الوحدة في زيادة r

$\bar{a}_\phi$ متجه الوحدة في زيادة ϕ

$\bar{a}_z$ z " " " "

Z

r

P

z

ϕ

r

y

تحويل أى متجه من الفراغ الكارتيزى إلى الإسطوانى

$$\bar{A} = A_x \bar{a_x} + A_y \bar{a_y} + A_z \bar{a_z}$$

$$\bar{A} = (A_r \bar{a_r}) + (A_\phi a_\phi) + (A_z \bar{a_z})$$

$$A_r = \bar{A} \cdot \bar{a_r} = A_x \bar{a_x} \cdot \bar{a_r} + A_y \bar{a_y} \cdot \bar{a_r} + A_z \bar{a_z} \cdot \bar{a_r}$$

zero

$$A_\phi = \bar{A} \cdot \bar{a_\phi} = A_x \bar{a_x} \cdot \bar{a_\phi} + A_y \bar{a_y} \cdot a_\phi + A_z \bar{a_z} \cdot \bar{a_\phi}$$

zero

$$A_z = A_z$$

لازم نحسبها بالنسبة Cart. ولا يصلح أنك تحسبه Clyn. بطرح النقط.

where

Vector

النهاية هي الأهم

⊙	$\bar{a_r}$	$\bar{a_\phi}$	$\bar{a_z}$
$\bar{a_x}$	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	0
$\bar{a_y}$	$\sin\phi$	$\cos\phi$	0
$\bar{a_z}$	0	0	1

التحويل للمتجه من Cart. إلى cylindrical

حسب المتجه $\bar{AB}$ من الإحداثيات الكارتيزية

$AB = B - A$

حسب ϕ للنقطة الأولى المتجه

$\phi = \tan^{-1} \frac{y_1}{x_1}$

[redacted]

The spherical Coordinate System

يتم توصيف المتجه بثلاث مركبات

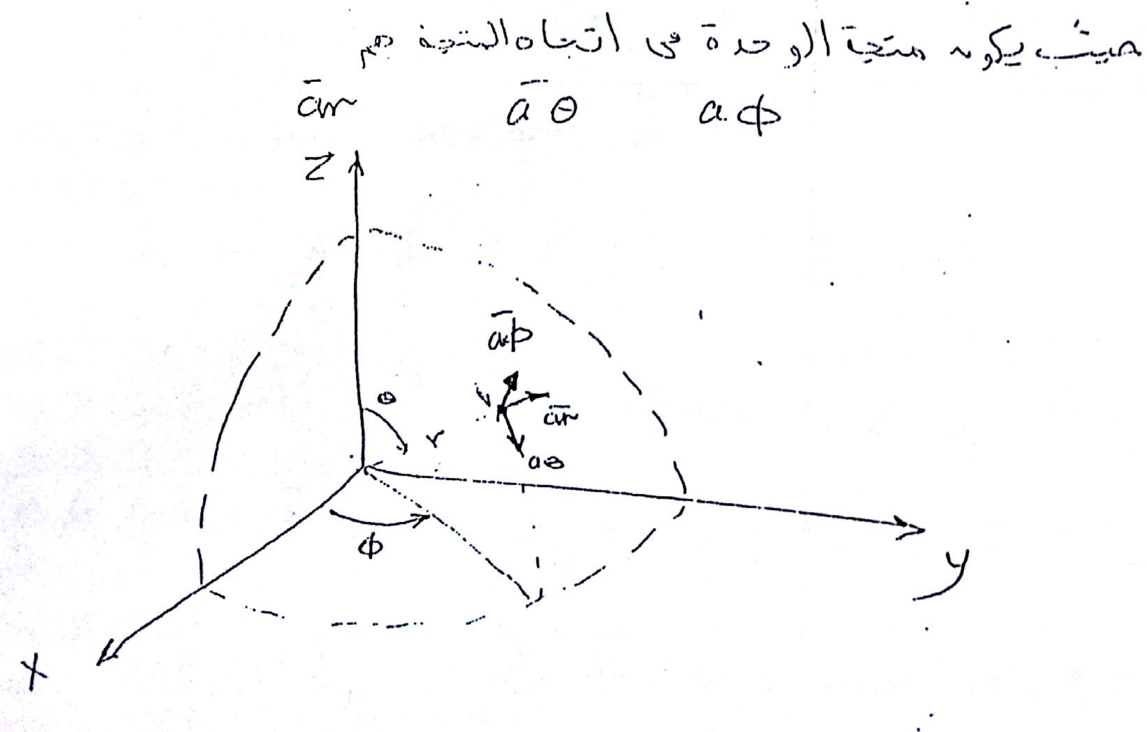
r و θ و ϕ

$\theta: 0 \to \pi$ $\phi: 0 \to 2\pi$

Z, P, r, θ, φ, y, x

حيث يكون متجه الوحدة في اتجاه المتجه هم

$\bar{a}_r$ $\bar{a}_\theta$ a_ϕ



Point

تحويل من النظام الكارتيزي إلى الكروي

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

تحويل من النظام الكروي للكارتيزي

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi$$

$$z = r \cos\theta$$

---

assume we have a vector $\bar{A}$

$$\bar{A} = A_x \bar{a}_x + A_y \bar{a}_y + A_z \bar{a}_z$$

نريد تحويلة إلى

$$\bar{A} = A_r \bar{a}_r + A_\theta \bar{a}_\theta + A_\phi \bar{a}_\phi$$

مركبة المتجه في اتجاه نصف القطر

$$A_r = \bar{A} \cdot \bar{a}_r = A_x \bar{a}_x \cdot \bar{a}_r + A_y \bar{a}_y \cdot \bar{a}_r + A_z \bar{a}$$

$$A_\theta = \bar{A} \cdot \bar{a}_\theta = A_x \bar{a}_x \cdot \bar{a}_\theta + A_y \bar{a}_y \cdot \bar{a}_\theta + A_z \bar{a}_z$$

$$A_\phi = \bar{A} \cdot \bar{a}_\phi = A_x \bar{a}_x \cdot \bar{a}_\phi + A_y \bar{a}_y \cdot \bar{a}_\phi + A_z \bar{a}_z$$

Where **Vector**

!: التحويل من كروي
كارتيزي

ج المتجه AB من الإحداثيات
ديكارتية $AB = B - A$

؛ ϕ و θ من النقطة المعطى
هي A:

$\phi = \tan^{-1} \frac{y_A}{x_A}$

$\theta = \cos^{-1} \frac{z_A}{r_A}$ $r_A = 1$

[redacted]

⊙	$\bar{a}_r$	$\bar{a}_\theta$	$\bar{a}_\phi$
$\bar{a}_x$	$\sin\theta \cos\phi$	$\cos\theta \cos\phi$	$-\sin\phi$
$\bar{a}_y$	$\sin\theta \sin\phi$	$\cos\theta \sin\phi$	$\cos\phi$
$\bar{a}_z$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0

Differential volume in variou coordinates

Cartesian تحديد عنصر صغير من الحجم في كل نوع من المحاور

$dA_1 = dy\, dz\, \bar{a}_x$

$dA_2 = dx\, dz\, \bar{a}_y$

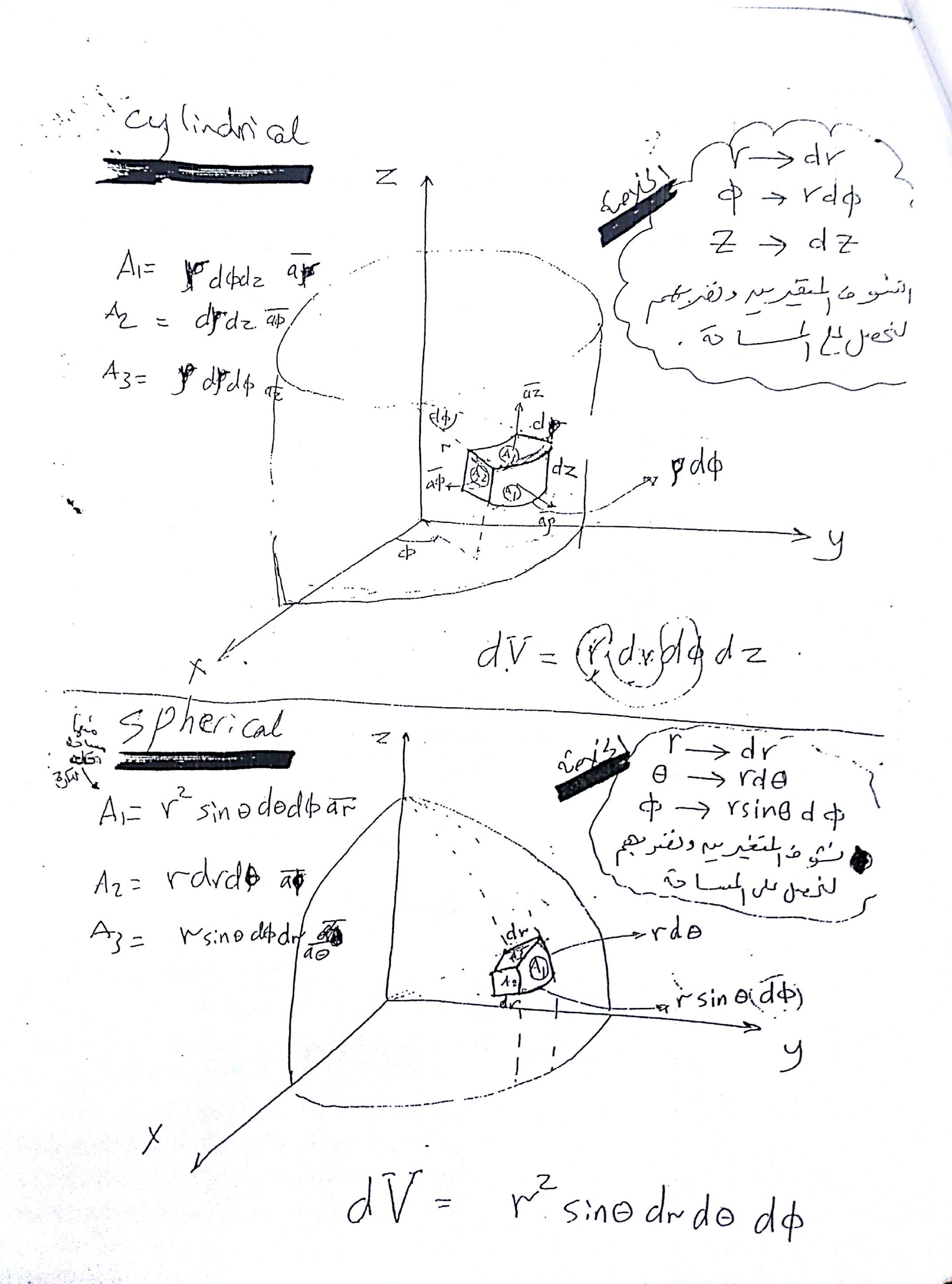
$dA_3 = dx\, dy\, \bar{a}_z$

$x \rightarrow dx$
$y \rightarrow dy$
$z \rightarrow dz$

ملاحظة لنعرف المساحة التي نستخدمها
تكون عمودية
① معرفة المتغير
أو
② معرفة الثابت

z y x a_z a_y a_x A_3 A_1 A_2 dz dy dx

$$dV = dx\, dy\, dz$$


cylindrical
ملاحظة
r → dr
φ → rdφ
Z → dz
الشوية المتغيرين والضربهم للحصول على المساحة .
A1 = ρ dφdz aρ
A2 = dρ dz aφ
A3 = ρ dρ dφ az
Z
az
dφ
r
dz
aφ
aρ
φ
ρdφ
y
x
dV = r dr dφ dz
spherical
ملاحظة
r → dr
θ → rdθ
φ → rsinθ dφ
الشوية المتغيرين والضربهم للحصول على المساحة
A1 = r² sinθ dθdφ ar
A2 = rdrdθ aφ
A3 = rsinθ dφdr aθ
Z
dr
rdθ
rsinθ (dφ)
y
X
dV = r² sinθ dr dθ dφ



Tanta University

Electrical Power and Machines Depart.
Electromagnetic Fields
Sheet (1)
Vector Analysis



Faculty of Engineering

1. If A= 2 a_x + 6 a_y − 3 a_z and A= −3 a_x − 4 a_y − 5 a_z find
   (a) A-B
   (b) Magnitude of A-B
   (c) Unit vector in the direction of A-B, A and B
   (d) A . B
   (e) A × B

R_{AB} = B − A

2. The vector R_{AB} extends from A (1,2,3) to B with length of 10 units and its direction is 0.6 a_x + 0.64 a_y + 0.48 a_z find the coordinates of point B.

3. Given points E (2,5,1), F (-1,4,-2) and G (3,-2,4) find
   (a) Unit vector directed from E towards F
   (b) Angle between R_{EF} and R_{EG}
   (c) Length of the perimeter of triangle EFG
   (d) Scalar projection of R_{EF} on R_{EG}

E(2,5,1)

θ

F(−1,4,−2)

4. Given points A (2,-1,2), B (-1,1,4) and C (4,3,-1) find
   (a) Angle between R_{AB} and R_{AC}
   (b) Scalar area of triangle ABC
   (c) Unit vector perpendicular to ABC

5. Using the coordinate system named, give vector at point A (2,1,-3) that extends to B (1,3,4)
   (a) Cartesian (b) Cylindrical (c) Spherical

E . F = |E| |F| cos θ

6. Transfer $G = \frac{xz}{y} a_x$ into:
   (a) Cylindrical (b) Spherical

7. Find the volume defined by:
   (a) 3 < r < 5, 0.1π < θ < 0.3π and 2π < Φ < 1.6π
   (b) 4 < r < 6, 2 < Z < 5 and 30° < Φ < 60°

8. Find the area of:
   (a) Curved surface of right circular cylinder with r = 2 m, 0 < Z < 5 and 30° < Φ < 120°
   (b) Strip 0 < θ < π on a spherical shell of radius r

$R_{AB} . R_{AC}$ = |AB| |AC| cos θ

Sheet (1)

(1) $\bar{A} = 2\bar{a}_x + 6\bar{a}_y - 3\bar{a}_z$, $\bar{B} = -3\bar{a}_x - 4\bar{a}_y - 5\bar{a}$

(a) $\bar{A} - \bar{B} = 5\bar{a}_x + 10\bar{a}_y + 2\bar{a}_z = \bar{R}_{BA}$

(b) $\bar{a}_A = \frac{\bar{A}}{|A|} = \frac{2\bar{a}_x + 6\bar{a}_y - 3\bar{a}_z}{\sqrt{4+36+9}} = \frac{2\bar{a}_x + 6\bar{a}_y - 3\bar{a}}{7}$

$\bar{a}_B = \frac{\bar{B}}{|B|} = \frac{-3\bar{a}_x - 4\bar{a}_y - 5\bar{a}_z}{\sqrt{50}}$

$\bar{a}_{A-B} = \frac{\bar{A} - \bar{B}}{|\bar{A} - \bar{B}|} = \frac{5\bar{a}_x + 10\bar{a}_y + 2\bar{a}_z}{\sqrt{129}}$

(c) $\bar{A} \cdot \bar{B} = (2)(-3) + (6)(-4) + (-3)(-5)$

$= -6 - 24 + 15 = -15$

(d) $\bar{A} * \bar{B} = \begin{vmatrix} \overset{\oplus}{\bar{a}_x} & \overset{\ominus}{\bar{a}_y} & \overset{\oplus}{\bar{a}_z} \\ 2 & 6 & -3 \\ -3 & -4 & -5 \end{vmatrix}$

$= \bar{a}_x(-30-12) - \bar{a}_y(-10-9) + \bar{a}_z(-8+18)$

(2) $R_{AB} \longrightarrow A(1,2,3) \longrightarrow B(x,y,z)$

$|\bar{R}_{AB}| = 10$

$\bar{a}_{AB} = 0.6\,\bar{a}_x + 0.64\,a_y + 0.48\,a_z$

$\bar{R}_{AB} = \bar{B} - \bar{A}$

$= |R_{AB}|\,\bar{a}_{AB}$

$= 6\,\bar{a}_x + 6.4\,a_y + 4.8\,\bar{a}_z$

$= (x-1)\,\bar{a}_x + (y-2)\,\bar{a}_y + (z-3)\,\bar{a}_z$

$x\,a_x + y\,a_y + z\,a_z$
$-[a_x + 2a_y + 3a_z]$
$(x-1)\,a_x + (y-2)$

$x - 1 = 6$; $y - 2 = 6.4$; $z - 3 = 4.8$

$x = 7$; $y = 8.4$; $z = 7.8$

$B(7, 8.4, 7.8)$

Z, y, x, A(1,2,3), B → (x,y,z)

③ $E(2,5,1)$; $F(-1,4,-2)$; $G(3,-2,\ldots$

ⓐ $\bar{EF} = \bar{F} - \bar{E} = -3a_x - 1\,\bar{a_y} - 3\bar{a_z}$

$|EF| = \sqrt{19}$

$$\bar{a}_{EF} = \frac{\bar{EF}}{|EF|} = \frac{-3\bar{a_x} - 1\,\bar{a_y} - 3\bar{a_z}}{\sqrt{19}}$$

ⓑ θ = angle between EF and EG

$\bar{EG} = \bar{G} - \bar{E} = 1\bar{a_x} - 7a_y + 3\bar{a_z}$

$$\bar{EF} \cdot \bar{EG} = -3 + 7 - 9 = -5$$

$$= |EF|\,|EG| \cos\theta$$

$$= \sqrt{19}\,\sqrt{59}\,\cos\theta$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-5}{\sqrt{19}\,\sqrt{59}} \simeq 100.8^\circ$$

(d) Scalar projection of (EF) on (EG)

$= |EF| \cos\theta$

$= \sqrt{19} \times \frac{-5}{\sqrt{19}\sqrt{59}}$

$= \frac{-5}{\sqrt{59}}$

∴ Value $= 5/\sqrt{59}$

(e) The length of perimeter $\Delta EFG = |EF| + |EG| + |FG|$

$\overline{FG} = \overline{G} - \overline{F} = 4a_x - 6a_y + 6a_z$

$|\overline{FG}| = \sqrt{88}$

$\Delta EFG = \sqrt{88} + \sqrt{19} + \sqrt{59}$

(4) $A(2,-1,2)$, $B(-1,1,4)$ and $C(4,3,-1)$

find

(a) angle between R_{AB} R_{AC}

$$\bar{R}_{AB} = \bar{B} - \bar{A} = -3\bar{a}_x + 2\bar{a}_y + 2\bar{a}_z$$

$$|AB| = \sqrt{17}$$

$$\bar{A}_C = C - A = 2a_x + 4\bar{a}_y - 3\bar{a}_z$$

$$|\bar{AC}| = \sqrt{29}$$

$$\bar{AB} \times \bar{AC} = \begin{vmatrix} \bar{a}_x & \bar{a}_y & \bar{a}_z \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{a}_x(-6-8) - \bar{a}_y(9-4) + \bar{a}_z(-12-4)$$

$$= -14\bar{a}_x - 5\bar{a}_y - 16\bar{a}_z$$

$$= |AB||AC| \sin\theta \; \bar{a}_N$$

A, B, C, (θ), Cn

$$\bar{a}_N = \frac{\bar{AB} \times \bar{AC}}{|\bar{AB} \times \bar{AC}|} = \frac{-14\bar{a}_x - 5\bar{a}_y - 16\bar{a}_z}{\sqrt{477}}$$

$$\frac{AB \times AC}{C_n}$$

$$\text{area } \Delta = \frac{1}{2}|AB||AC| \sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{477}$$

$\theta \rightarrow$ $|AB||AC| \cos\theta = \bar{AB} \cdot \bar{AC}$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\bar{AB} \cdot \bar{AC}}{|AB||AC|} = \cos^{-1}\frac{-6+8-6}{\sqrt{17} * \sqrt{29}} = 100.38^\circ$$

sh1

[5] $A(2, +1, -3)$ $B(1, 3, 4)$

Find R_{AB}

a) Cartesian $R_{AB} = B - A = -\bar{a}_x + 2\bar{a}_y + 7\bar{a}_z$

b) Cyllinderical

لو معطي نقطة ← استعمل نق
Ⓐ البداية

$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \frac{1}{2} = 26.6°$

$A_r = A_x \cos\phi + A_y \sin\phi$

$= -1 * \cos 26.6$
$+ 2 * \sin 26.6$
$= 1.36 \times 10^{-3}$

	A_r	A_ϕ	A_z
A_x	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	0
A_y	$\sin\phi$	$\cos\phi$	0
A_z	0	0	1

$A_\phi = -1 * -\sin 26.6$
$+ 2 * \cos 26.6$
$= 2.24$

$A = 1.36 \times 10^{-3} \bar{a}_r + 2.24 \bar{a}_\phi + 7 \bar{a}_z$

c) Spherical

$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos^{-1} \frac{-3}{\sqrt{4+1+9}}$
$= 143.3$

$\phi = 26.6$

$\theta = 143.3$

	A_r	A_θ	A_ϕ
(-1) A_x	$\sin\theta\cos\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$-\sin\phi$
(2) A_y	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\phi$
(7) A_z	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0

$A_r = -\sin\theta\cos\phi + 2\sin\theta\sin\phi + 7\cos\theta$

$= \square$

$A_\theta = -\cos\theta\cos\phi + 2\cos\theta\sin\phi - 7\sin\theta$

$= \triangle$

$A_\phi = 2.24$

$A = \square\ \bar{a}_r + \triangle\ a_\theta + 2.24\ a_\phi$ #

(8) $dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$

$$V = \int_{r=3}^{5} \int_{\theta=0.1\pi}^{0.3\pi} \int_{\phi=1.2\pi}^{1.6\pi} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= \phi \Big|_{1.2\pi}^{1.6\pi} \int_{r=3}^{5} \int_{\theta=0.1\pi}^{0.3\pi} r^2 \sin\theta \, dr \cdot d\theta$$

$$= (1.6\pi - 1.2\pi) \; \frac{r^3}{3} \Big|_{3}^{5} \int_{\theta=0.1\pi}^{0.3\pi} \sin\theta \, d\theta$$

$$= (0.4\pi)\left(\frac{5^3 - 3^3}{3}\right) \; -\cos\theta \Big|_{0.1\pi}^{0.3\pi}$$

$$= (0.4\pi)\left(\frac{98}{3}\right) \left[-\cos(0.3*180) + \cos(0.1*180) \right.$$

$$= 14.91 \text{ unit}^3$$

(6) (b) cylindrical

$$dV = r\,dr\,d\phi\,dz$$

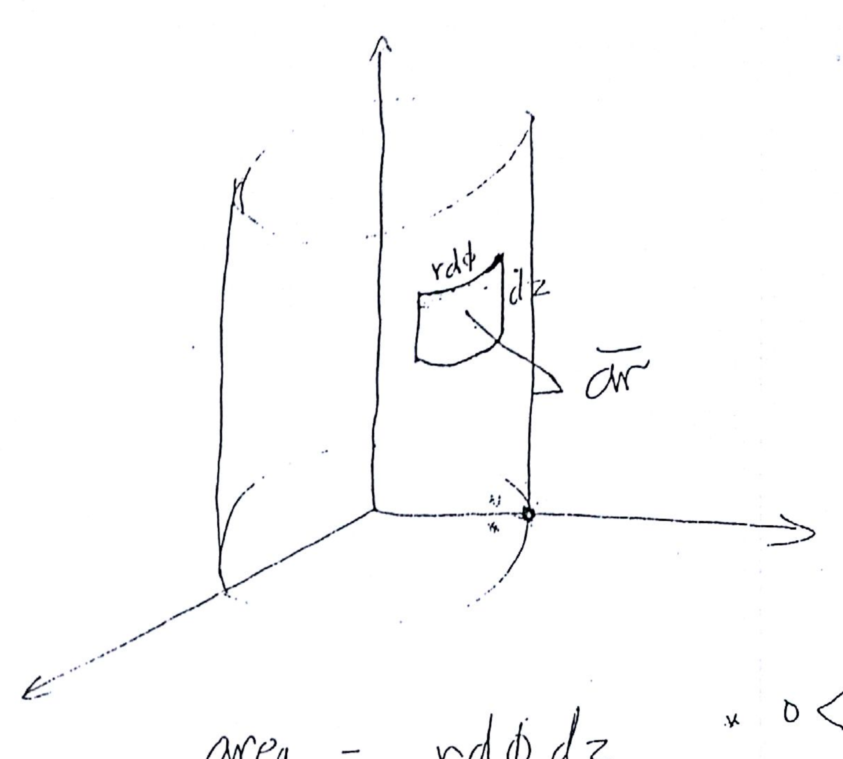
$$V = \int_{r=4}^{6} \int_{\phi = 30*\frac{\pi}{180}}^{60*\frac{\pi}{180}} \int_{z=2}^{5} r\,dr\,d\phi\,dz$$

$$= \frac{r^2}{2}\Big|_4^6 * \phi\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} * z\Big|_2^5$$

$$= \frac{36-16}{2} * \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) * (5-2)$$

$$= 10 * \frac{\pi}{6} * 3 = 5\pi \text{ unit}^3$$

(7)



المتغيرات

$* \ 0 < Z < 5$

$* \ 30 < \phi < 120$ → $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$

$$area = r\,d\phi\,dz$$

$$= r \int_{\phi}\int_{z} d\phi\, dz$$

$$= 2 * \phi \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \; z \Big|_{0}^{5}$$

$$= 2 * \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) * (5 - 0)$$

$r\,d\theta$

$r \sin\theta \, d\phi$

$\phi = 0 \rightarrow 2\pi \qquad \theta = 0 \rightarrow \pi$

$$d(\text{area}) = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\text{area} = \int_{\phi}\int_{\theta} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= r^2 \; \phi \Big|_0^{2\pi} \; -\cos\theta \Big|_0^{\pi}$$

$$= r^2 (2\pi)(-\cos\pi + \cos 0)$$

$$= 4\pi r^2$$